ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

———————o0o———————

PHẠM THỊ THUÝ QUỲNH

MỘT SỐ BẤT ĐẲNG THỨC HÀM s-LỒI VÀ ÁP DỤNG

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN, 5/2019

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

———————o0o———————

PHẠM THỊ THUÝ QUỲNH

MỘT SỐ BẤT ĐẲNG THỨC HÀM s-LỒI VÀ ÁP DỤNG

Chuyên ngành: Phương pháp toán sơ cấp
Mã số: 8460113

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

GIÁO VIÊN HƯỚNG DẪN

PGS.TS. NGUYỄN THỊ THU THỦY

THÁI NGUYÊN, 5/2019

Mục lục

Bảng ký hiệu **1**

Mở đầu **2**

1 Một số tính chất của hàm s-lồi **5**

1.1 Hàm lồi 5

1.1.1 Định nghĩa 5

1.1.2 Tính chất 6

1.2 Hàm s-lồi 8

1.2.1 Định nghĩa, ví dụ 8

1.2.2 Một số tính chất của hàm s-lồi 9

2 Một số bất đẳng thức hàm s-lồi và áp dụng **19**

2.1 Bất đẳng thức Hermite–Hadamard 19

2.1.1 Bất đẳng thức Hermite–Hadamard cho hàm lồi . . . 19

2.1.2 Bất đẳng thức Hermite–Hadamard cho hàm s-lồi . . 22

2.2 Bất đẳng thức Ostrowski 25

2.2.1 Bất đẳng thức Ostrowski cho hàm lồi 25

2.2.2 Bất đẳng thức Ostrowski cho hàm s-lồi 31

2.3 Áp dụng 36

Kết luận **42**

Tài liệu tham khảo **43**

Bảng ký hiệu

$\mathbb{R}$	tập số thực
$\mathbb{R}_+$	tập số thực không âm
$\mathbb{R}^n$	không gian Euclid n chiều
$L^p[a,b]$	không gian các hàm khả tích bậc p trên $[a,b]$
K_s^1	lớp hàm s-lồi loại một
K_s^2	lớp hàm s-lồi loại hai
I^o	phần trong của tập I

Mở đầu

Hàm lồi và tập lồi đã được nghiên cứu từ lâu bởi Hölder, Jensen, Minkowski. Đặc biệt với những công trình của Fenchel, Moreau, Rockafellar vào các thập niên 1960 và 1970 đã đưa giải tích lồi trở thành một trong những lĩnh vực phát triển nhất của toán học. Hai tính chất cơ bản của hàm lồi là tính chất đạt giá trị lớn nhất trên biên và bất kỳ cực tiểu địa phương nào cũng là cực tiểu trên tập xác định giúp cho hàm lồi được sử dụng rộng dãi trong toán học lý thuyết và ứng dụng. Bên cạnh đó, một số hàm không lồi theo nghĩa đầy đủ nhưng cũng chia sẻ một vài tính chất nào đó của hàm lồi. Chúng được gọi là các hàm lồi suy rộng (generalized convex function)...

Một trong những bất đẳng thức nổi tiếng cho hàm f lồi trên $[a,b] \subset \mathbb{R}$ là bất đẳng thức Hermite–Hadamard:

$$f\Big(\frac{a+b}{2}\Big) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \tag{1}$$

hay ở dạng tương đương:

$$(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \int\limits_a^b f(x)dx \leq \ (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}. \tag{2}$$

Năm 1938, Ostrowski đã thu được một đánh giá cho giá trị tuyệt đối của hiệu số của một hàm f khả vi với giá trị trung bình tích phân của nó trên một đoạn $[a,b]$ hữu hạn (xem tài liệu trích dẫn trong [4]):

$$\left| f(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du \right| \leq (b-a)M\left[\frac{1}{4} + \frac{\Big(x-\frac{a+b}{2}\Big)^2}{(b-a)^2}\right], \tag{3}$$

hay ở dạng tương đương:

$$\left| f(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du \right| \leq \frac{M}{b-a}\left[\frac{(x-a)^2+(b-x)^2}{2}\right]. \qquad (4)$$

Có rất nhiều nhà toán học đã nghiên cứu và mở rộng bất đẳng thức Hermite–Hadamard (1) và Ostrowski (4) cho các lớp hàm lồi khác nhau và đưa ra nhiều ứng dụng trong chứng minh các bất đẳng thức đại số, hình học, lượng giác khác. Đây là một đề tài được nhiều nhà toán học quan tâm. Do đó, chúng tôi chọn đề tài "Một số bất đẳng thức hàm s-lồi và áp dụng" để nghiên cứu cho luận văn thạc sĩ chuyên ngành Phương pháp toán sơ cấp của tác giả.

Mục tiêu của đề tài luận văn là trình bày các kiến thức cơ bản về hàm s-lồi, một số tính chất của hàm s-lồi; trình bày một số mở rộng mới của bất đẳng thức dạng Hermite–Hadamard, Ostrowski cho hàm lồi, hàm s-lồi và áp dụng trong đánh giá một số giá trị trung bình đặc biệt. Nội dung của luận văn được viết trên cơ sở các bài báo [3], [4], [7] và [8].

Nội dung của luận văn được trình bày trong hai chương. Chương 1 "Một số tính chất của hàm s-lồi" trình bày một số kiến thức cơ bản về hàm lồi, hàm s-lồi, mối liên hệ giữa hàm lồi, hàm s-lồi, đưa ra ví dụ về hàm s-lồi và một số tính chất của hàm s-lồi. Chương 2 "Một số bất đẳng thức hàm s-lồi và áp dụng" trình bày một số mở rộng mới của bất đẳng thức Hermite–Hadamard, Ostrowski cho hàm lồi, hàm s-lồi và áp dụng.

Luận văn được hoàn thành tại Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên. Trong quá trình học tập và thực hiện luận văn này, Trường Đại học Khoa học đã tạo mọi điều kiện tốt nhất để tác giả học tập, nghiên cứu. Tác giả xin được bày tỏ lòng biết ơn chân thành đến các thầy, cô trong khoa Toán - Tin, trong Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên. Đặc biệt, tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới PGS.TS Nguyễn Thị Thu Thủy - người đã trực tiếp giúp đỡ, hướng dẫn về kiến thức, tài liệu và phương pháp để tác giả hoàn thành đề tài nghiên cứu khoa học này.

Tác giả cũng xin được gửi lời cảm ơn tới gia đình, bạn bè, đồng nghiệp đã động viên, cổ vũ, khích lệ và giúp đỡ trong thời gian qua.

Thái Nguyên, tháng 5 năm 2019

Tác giả luận văn

Phạm Thị Thúy Quỳnh

Chương 1

Một số tính chất của hàm s-lồi

Chương này giới thiệu một số kiến thức cơ bản của hàm lồi, hàm s-lồi và một số tính chất của hàm s-lồi. Nội dung của chương được tổng hợp từ các tài liệu [1], [2] và [7].

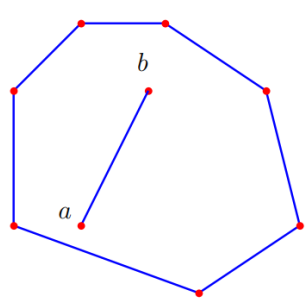
1.1 Hàm lồi

1.1.1 Định nghĩa

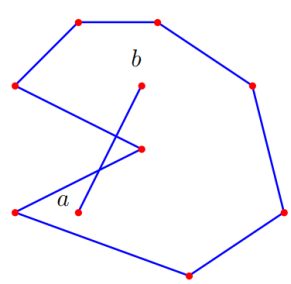
Cho hai điểm $a, b \in \mathbb{R}^n$. Tập tất cả các điểm $x = (1-\lambda)a + \lambda b$ với $0 \leq \lambda \leq 1$ gọi là đoạn thẳng (đóng) nối a và b, và được ký hiệu là $[a, b]$.

Định nghĩa 1.1.1 (xem [1]) Tập $C \subseteq \mathbb{R}^n$ được gọi là lồi nếu với mọi $\lambda \in [0, 1]$ và $x_1, x_2 \in C$ thì $x_\lambda := \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in C$.

Như vậy, tập lồi C chứa mọi đoạn thẳng nối hai điểm bất kỳ của nó.



Hình 1.1: Tập lồi



Hình 1.2: Tập không lồi

Định nghĩa 1.1.2 (xem [1]) Cho C là một tập con lồi khác rỗng của không gian $\mathbb{R}^n$, $f : C \to [-\infty, +\infty]$ là hàm số thực xác định trên tập lồi C. Hàm f được gọi là

(i) hàm lồi trên C nếu với mọi x, y thuộc C và mọi số thực λ thuộc $[0, 1]$ ta có

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y). \tag{1.1}$$

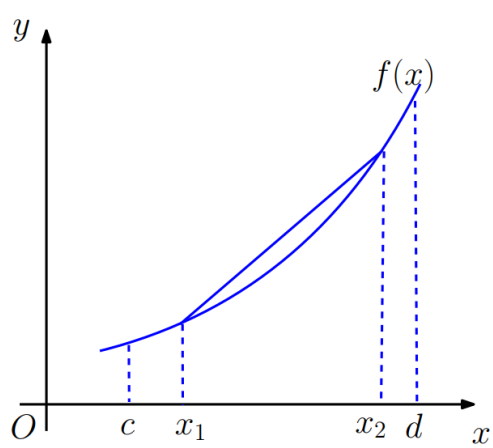
(ii) lồi chặt trên C nếu bất đẳng thức (1.1) là chặt với mọi x khác y.

Nếu $n = 1$, Định nghĩa 1.1.2 cho ta định nghĩa về hàm lồi một biến trên $\mathbb{R}$.

Định nghĩa 1.1.3 (xem [1]) Hàm $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ được gọi là hàm lồi nếu với mọi $x, y \in [a, b]$ và $\lambda \in [0, 1]$ thì

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y). \tag{1.2}$$

Hàm f được gọi là hàm lõm nếu hàm $(-f)$ là lồi.



Hình 1.3: Hàm lồi.

1.1.2 Tính chất

Sau đây là mối liên hệ giữa hàm lồi và tập lồi.

Định lý 1.1.4 (xem [1]) *Giả sử hàm $f : \mathbb{R}^n \to [-\infty; +\infty]$ là một hàm lồi trên $\mathbb{R}^n$ và $\lambda \in [-\infty; +\infty]$. Khi đó các tập*

$$C_\lambda = \big\{x : f(x) < \lambda\big\}, \quad \overline{C}_\lambda = \big\{x : f(x) \leq \lambda\big\}$$

là các tập lồi.

Tập C_λ, $\overline{C}_\lambda$ trong Định lý 1.1.4 gọi là các tập mức dưới.

Định lý 1.1.5 (xem [1]) *Cho C là một tập lồi, khác rỗng trong $\mathbb{R}^n$ và $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ là một hàm lồi. Mọi điểm cực tiểu địa phương của f trên C đều là cực tiểu toàn cục.*

Chứng minh. Giả sử $x_0 \in C$ là một điểm cực tiểu địa phương của hàm f trên C và $U(x_0)$ là một lân cận của x_0 sao cho $f(x_0) \leq f(x)$ với mọi $x \in C \cap U(x_0)$. Với mọi $x \in C$ ta có

$$x_\lambda = \lambda x + (1 - \lambda)x_0 \in C \cap U(x_0) \quad \text{với mọi } \lambda > 0 \text{ đủ bé.}$$

Khi đó,

$$f(x_0) \leq f(x_\lambda) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(x_0)$$

hay $f(x_0) \leq \lambda f(x)$. Do $\lambda > 0$ nên $f(x_0) \leq f(x)$. Vì $x \in C$ được chọn tùy ý nên x_0 là điểm cực tiểu toàn cục của f trên C. □

Định lý 1.1.6 (xem [1]) *Một hàm lồi chặt f trên một tập lồi C có nhiều nhất một điểm cực tiểu trên C.*

Chứng minh. Nếu f có hai điểm cực tiểu khác nhau $x_1, x_2 \in C$ thì do tính lồi chặt của f,

$$f\Big(\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2\Big) < f(x_1) = f(x_2),$$

điều này vô lý. □

Ví dụ 1.1.7 Hàm lồi chặt một biến $f(x) = x^2$ có duy nhất một điểm cực tiểu $x_0 = 0$. Hàm lồi chặt $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$ không có điểm cực tiểu nào.

Sau đây là mối liên hệ giữa hàm lồi n biến và hàm lồi một biến.